

# Programme de mathématiques pour la classe de terminale S

Année scolaire 2011-2012

## I. INTRODUCTION

Le programme de terminale S s'inscrit dans la continuité de celui de première et il en reprend de ce fait les éléments. La classe terminale signe la fin des études secondaires ; son contenu doit donc répondre à une double exigence :

- s'inscrire dans la cohérence des connaissances transmises aux élèves dans leur cursus scolaire,
- ouvrir à des horizons neufs et variés.

Les formations supérieures sont naturellement diverses et offrent aux mathématiques une place variable. Dans certaines filières, elles seront une matière centrale et pour toutes un outil de modélisation et de calcul. La réussite des jeunes étudiants dépendra donc crucialement de leur maîtrise des sciences mathématiques ; pour les préparer, le programme prend en compte les évolutions de la discipline et différentes demandes qui sont l'expression des besoins mathématiques croissants de notre société.

Les élèves à qui ce programme est destiné ont grandi dans un environnement technologique, qui façonne leur comportement et leurs valeurs et crée des centres d'intérêt profondément nouveaux. La puissance d'investigation des outils informatiques et l'existence de calculatrices performantes dont la plupart des élèves disposent sont des progrès bienvenus, et leur l'impact sur la pédagogie des mathématiques est considérable. Il faut accompagner cette évolution, notamment en utilisant ces outils dans les phases de découverte et d'observation par les élèves. Certains éléments (par exemple les équations différentielles ou la statistique) apparaissent immédiatement utiles aux autres disciplines scientifiques. Mais utile ne signifie pas utilitaire. Les mathématiques, science du calcul, ne sont pas que cela, et il est important que les élèves comprennent qu'elles sont aussi une école de rigueur qui exige une pensée claire. Il faut pour cela maintenir l'équilibre entre l'entraînement au calcul et la réflexion, également indispensables au progrès mathématique, et donc présenter, dans le cadre nécessairement modeste du programme, des démonstrations qui nourrissent cette réflexion. Les élèves pourront ainsi expliciter des raisonnements sans se limiter à quelques démarches stéréotypées, voir clairement la différence entre ce qu'on établit et ce qui est provisoirement admis et comprendre comment les mathématiques se construisent.

Un programme doit se limiter à ce qui peut être effectivement enseigné dans le temps imparti. Or le cursus en mathématiques des élèves qui accèdent maintenant à la classe terminale est différent de celui des générations antérieures. Son contenu réaliste tient compte de cette situation. Il permettra au professeur d'enseigner toutes les notions du programme, et de prendre le temps d'approfondir les concepts importants et d'éveiller la curiosité de ses élèves. Certains théorèmes du programme sont admis. Il convient alors d'en faire assimiler le contenu en montrant comment ils s'appliquent, et en considérant éventuellement des cas particuliers dont on peut faire la démonstration. Certaines propriétés sont considérées comme règles opératoires (par exemple, si deux fonctions admettent une limite en un point, la limite de leur somme est la somme de leurs limites). Dire qu'une propriété est utilisée comme règle opératoire signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul. Ce programme est complété par un document d'accompagnement : celui-ci en explicite certaines intentions et propose des pistes de mise en œuvre.

## II. ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Il est demandé d'introduire la fonction exponentielle très tôt dans l'année, dans un souci de cohérence entre les enseignements de mathématiques, de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre. Pour l'introduction des autres concepts, l'enseignant reste libre de l'ordre de présentation. À titre indicatif, la répartition horaire entre les différents chapitres peut être : analyse 45% (environ 14 semaines), géométrie 35% (environ 11 semaines), probabilité et statistique 20% (environ 6 semaines).

## II.1. Analyse

Deux objectifs majeurs fédèrent les éléments de ce chapitre :

- l'extension du champ des suites et des fonctions vues en classe de première à quelques nouvelles fonctions classiques : exponentielles, logarithmes, trigonométriques (telle la fonction tangente) ou faisant intervenir des radicaux ;
- l'initiation au calcul intégral et à la problématique des équations différentielles : la présence de ces dernières, bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation ; un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif.

L'étude des suites et fonctions sera motivée par la résolution de problèmes : elle n'est pas une fin en soi. Ces problèmes pourront être d'origine mathématique, physique, biologique, économique ou autre et amèneront à des recherches d'extrema, des comparaisons de fonctions, des résolutions graphiques d'équations ou d'inéquations, etc. On privilégiera les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde. On pourra remarquer en particulier que certains phénomènes peuvent être étudiés soit en temps discret – à l'aide d'une suite –, soit en temps continu – à l'aide d'une fonction (évolution d'un capital par exemple).

Une bonne maîtrise des fonctions classiques (dérivées, extrema, comportements asymptotiques, courbes représentatives) est nécessaire ; elle doit permettre une certaine aisance dans les problèmes qui les mettent en jeu. La notion de continuité est introduite et permet de disposer du langage nécessaire pour énoncer les théorèmes de façon satisfaisante. L'étude théorique de la continuité des fonctions classiques est exclue. Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'étude d'une fonction se limitera le plus souvent à un intervalle.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Limites de suites et de fonctions</b></p> <p>Rappel de la définition de la limite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en <math>+\infty</math> ou <math>-\infty</math>.</p> <p>Théorème « des gendarmes » pour les fonctions.</p> <p>Limites de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions ; limite de la composée de deux fonctions, de la composée d'une suite et d'une fonction.</p>	<p>Pour exprimer que <math>f(x)</math> tend vers <math>L</math> quand <math>x</math> tend vers <math>+\infty</math>, on dira que : « tout intervalle ouvert contenant <math>L</math> contient toutes les valeurs <math>f(x)</math> pour <math>x</math> assez grand ».</p> <p>On montrera qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini.</p> <p>On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme <math>ax + b + h(x)</math>, où <math>h</math> tend vers 0 à l'infini.</p> <p>On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou au tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.</p> <p>On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini.</p> <p>On étendra ce théorème au cas des limites infinies.</p> <p>On complétera les résultats énoncés en classe de première ; on se bornera à une justification intuitive (calculatoire ou graphique).</p>	<p>Il s'agit de prolonger le travail fait en première sur les suites. L'expression « pour <math>x</math> assez grand » est l'analogue pour les fonctions de l'expression « à partir d'un certain rang » utilisée pour les suites.</p> <p>Pour les limites en un réel <math>a</math>, aucune définition n'est exigée : on reprendra l'approche intuitive adoptée en classe de première. Sur un exemple, on fera le lien entre limite en un réel <math>a</math> et à l'infini. On pourra parler de limite à droite ou à gauche à l'occasion de certains exemples.</p> <p>Ces propriétés seront appliquées comme règles opératoires.</p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Langage de la continuité et tableau de variations</b></p> <p>Continuité en un point <math>a</math>.</p> <p>Théorème (dit <i>des valeurs intermédiaires</i>) : « Soient <math>f</math> une fonction définie et continue sur un intervalle <math>I</math> et <math>a</math> et <math>b</math> deux réels dans <math>I</math>. Pour tout réel <math>k</math> compris entre <math>f(a)</math> et <math>f(b)</math>, il existe un réel <math>c</math> compris entre <math>a</math> et <math>b</math> tel que <math>f(c) = k</math> ».</p>	<p>On définira la continuité de <math>f</math> en un point <math>a</math> par <math>\lim_a f = f(a)</math> ou <math>\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)</math>.</p> <p>On illustrera la notion de continuité sur un intervalle en parlant de tracé sans lever le crayon. On présentera à titre de contre-exemple le cas de la fonction partie entière.</p> <p>Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : « si <math>f</math> est une fonction continue strictement monotone sur <math>[a; b]</math>, alors, pour tout réel <math>k</math> compris entre <math>f(a)</math> et <math>f(b)</math>, l'équation <math>f(x) = k</math> a une solution unique dans <math>[a; b]</math> ».</p> <p>On étendra ce corollaire au cas où <math>f</math> est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de <math>f</math> aux bornes de l'intervalle étant supposées connues.</p> <p>◇ On pourra approcher la solution de l'équation <math>f(x) = k</math> par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou l'ordinateur.</p>	<p>Les fonctions rencontrées en terminale sont le plus souvent continues sur leur intervalle d'étude ; on indiquera clairement que les fonctions construites à partir des fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues. Démontrer qu'une fonction est continue en un point ou sur un intervalle n'est pas un objectif du programme.</p> <p>On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.</p> <p>Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type <math>f(x) = k</math>.</p>
<p><b>Dérivation</b></p> <p>Rappels sur les règles de dérivation et sur le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. Application à l'étude de la fonction tangente.</p> <p>Dérivation d'une fonction composée.</p>	<p>On rappellera en particulier le théorème suivant qui sera utilisé à propos des primitives : « une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle ».</p> <p>On fera remarquer que toute fonction dérivable est continue.</p> <p>Écriture différentielle <math>dy = f'(x) dx</math>.</p> <p>Le principe de la démonstration sera indiqué. La notation différentielle est ici un moyen mnémotechnique de retrouver la formule.</p>	<p>On se contentera d'expliquer que l'écriture différentielle exprime symboliquement l'égalité : <math>\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x</math> où <math>\varepsilon</math> tend vers zéro avec <math>\Delta x</math>.</p> <p>À l'occasion des exercices, on rencontre des relations entre grandeurs de la forme <math>x = f(t)</math>, <math>y = g(x)</math>, <math>v = u(t)</math> etc., où <math>t</math> représente un temps, <math>x</math> et <math>y</math> des longueurs, <math>v</math> une vitesse : dans ces conditions, <math>f'(t)</math> est une vitesse, <math>g'(x)</math> est un nombre et <math>u'(t)</math> une accélération, ce que l'écriture différentielle met en valeur.</p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Introduction de la fonction exponentielle</b></p> <p>Étude de l'équation <math>f' = kf</math>. Théorème : « Il existe une unique fonction <math>f</math> dérivable sur <math>\mathbf{R}</math> telle que <math>f' = f</math> et <math>f(0) = 1</math> ». Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre <math>e</math>. Notation <math>e^x</math>. Extension du théorème pour l'équation <math>f' = kf</math>.</p>	<p>L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables <math>f</math> telles que <math>f(x + y) = f(x)f(y)</math>.</p> <p>♦ On construira avec la méthode d'Euler des représentations graphiques approchées de <math>f</math> dans le cas <math>k = 1</math> ; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.</p> <p>L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole.</p> <p>Approximation affine, au voisinage de 0, de <math>h \mapsto e^h</math>.</p>	<p>Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.</p>
<p><b>Étude des fonctions logarithmes et exponentielles</b></p> <p>Fonction logarithme népérien ; notation <math>\ln</math>. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.</p> <p>Fonctions <math>x \mapsto a^x</math> pour <math>a &gt; 0</math>. Comportement asymptotique ; allure des courbes représentatives.</p>	<p>On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée <math>\log</math>, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres.</p> <p>Approximation affine, au voisinage de 0, de <math>h \mapsto \ln(1 + h)</math>.</p> <p>On positionnera, à l'aide d'un grapheur, les courbes représentatives de <math>x \mapsto e^x</math> et de <math>x \mapsto \ln x</math> par rapport à celles des fonctions <math>x \mapsto x^n</math>.</p>	<p>Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ;</li> <li>• soit poser le problème des fonctions dérivables sur <math>\mathbf{R}^{+*}</math> telles que <math>f(xy) = f(x) + f(y)</math> et admettre l'existence de primitives pour la fonction <math>x \mapsto \frac{1}{x}</math> ;</li> <li>• soit traiter le logarithme après l'intégration.</li> </ul>
<p><b>Croissance comparée</b> des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme.</p> <p>Fonction racine <math>n</math>-ième : <math>x \mapsto \sqrt[n]{x}</math>.</p>	<p>On établira la limite en <math>+\infty</math> de <math>\frac{e^x}{x}</math> et de <math>\frac{\ln x}{x}</math> ; on en déduira la limite en <math>-\infty</math> de <math>xe^x</math> ; on aboutira aux règles opératoires : « à l'infini, l'exponentielle de <math>x</math> l'emporte sur toute puissance de <math>x</math> » et « les puissances de <math>x</math> l'emportent sur le logarithme de <math>x</math> ».</p> <p>On étudiera les fonctions <math>x \mapsto e^{-kx}</math>, ou <math>x \mapsto e^{-kx^2}</math>, avec <math>k &gt; 0</math>, et on illustrera leur décroissance rapide.</p> <p>La racine <math>n</math>-ième, sera introduite et expliquée ; on utilisera aussi la notation <math>x^{1/n}</math>.</p>	<p>À travers des exemples, on étendra ces règles au cas des polynômes, comme pour la fonction <math>x \mapsto \frac{e^x}{1 + x^2}</math>.</p> <p>Ces fonctions sont très utilisées en probabilité et en statistique, en théorie du signal etc.</p> <p>On pourra aborder lors de l'étude de problèmes des fonctions du type <math>x \mapsto x^\alpha</math> (avec <math>\alpha</math> réel) ; l'étude générale de ces fonctions est hors programme.</p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Suites et récurrence</b> Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.</p> <p>Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.</p> <p>Théorème de convergence des suites croissantes majorées.</p>	<p>On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.</p> <p>On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite <math>(u_n)</math> vers sa limite <math>L</math>, en complétant l'étude sur <b>calculatrice ou ordinateur</b> par des encadrements de <math>(u_n - L)</math>.</p> <p>◊ Ce pourra être l'occasion d'écrire un programme de calcul mesurant la vitesse de convergence.</p> <p>On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par <math>u_{n+1} = au_n + b</math>.</p> <p>La notion de suites adjacentes sera introduite en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires (par exemple aire d'un cercle par la méthode d'Archimède, aire sous une parabole).</p> <p>On montrera le lien avec l'écriture décimale d'un réel.</p> <p>◊ Calcul d'une solution d'une équation <math>f(x) = 0</math> par un algorithme dichotomique.</p> <p>◊ Calculs d'aires.</p>	<p>On présentera le principe de récurrence comme un axiome.</p> <p>◊ On étudiera expérimentalement des suites définies par une relation de récurrence.</p> <p>Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.</p> <p>On fera le lien avec la méthode de dichotomie. L'objectif est d'enrichir la vision des nombres réels et d'indiquer l'importance des suites adjacentes dans le problème de la mesure des grandeurs géométriques ou physiques.</p> <p>L'étude de suites <math>u_{n+1} = f(u_n)</math> pour approcher une solution de l'équation <math>f(x) = x</math> n'est pas un objectif du programme : la dichotomie, le balayage suffisent au niveau de la terminale pour des problèmes nécessitant de telles approximations.</p> <p>L'équivalence avec le théorème des suites adjacentes pourra faire l'objet d'un problème.</p>
<p><b>Intégration</b> Pour une fonction <math>f</math> continue positive sur <math>[a, b]</math>, introduction de la notation <math>\int_a^b f(x) dx</math> comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction. Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.</p>	<p>On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.</p> <p>On indiquera la convention de signe sur un intervalle où <math>f</math> est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à <math>f</math> pour la rendre positive.</p>	<p>Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.</p> <p>Cette extension doit être faite brièvement. La convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de <math>\int_a^b f(x) dx</math></p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p>Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles. Inégalité de la moyenne.</p>	<p>On interprétera ces propriétés en terme d'aire ou en terme de valeur moyenne pour les rendre conformes à l'intuition.</p> <p>On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée ;</li> <li>• expression intégrale du volume d'un solide dont on connaît les aires des sections avec les plans d'équation <math>z = \text{constante}</math> ;</li> <li>• calculs de probabilités d'intervalles pour des lois de probabilités à densité.</li> </ul>	<p>Les propriétés générales de l'intégrale seront rapidement commentées et admises ; les élèves s'en serviront comme règles opératoires.</p> <p>Ce travail est une façon de préparer le théorème liant intégrales et primitives, particulièrement frappant dans le cas du point mobile. Aucune connaissance théorique n'est exigible sur ces activités de modélisation. Dans les problèmes, les expressions intégrales seront toujours données. En lien avec la physique, on mentionnera le problème des unités : si <math>x</math> et <math>y</math> sont deux grandeurs liées par une relation <math>y = f(x)</math>, l'intégrale <math>\int_a^b f(x) dx</math> est une grandeur homogène au produit des grandeurs <math>xy</math> tandis que la valeur moyenne est homogène à <math>y</math>.</p>
<p><b>Intégration et dérivation</b></p> <p>Notion de primitive. Théorème : « si <math>f</math> est continue sur un intervalle <math>I</math>, et si <math>a</math> est un point de <math>I</math>, la fonction <math>F</math> telle que</p> $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ <p>est l'unique primitive de <math>f</math> sur <math>I</math> s'annulant en <math>a</math> ».</p> <p>Calcul de <math>\int_a^b f(x) dx</math> à l'aide d'une primitive de <math>f</math>.</p> <p>◇ Exemple de tracé de la courbe approchée de la primitive d'une fonction par la méthode d'Euler.</p> <p>Intégration par parties.</p>	<p>On démontrera que <math>F</math> est une primitive de <math>f</math> dans le cas où <math>f</math> est continue et croissante, et on admettra le cas général.</p> <p>Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions <math>x \mapsto x^n</math>, <math>x \mapsto \sqrt{x}</math>, <math>x \mapsto \ln x</math>, <math>x \mapsto e^x</math>, sinus, cosinus).</p> <p>Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de <math>\frac{u'}{u}</math>, <math>u'e^u</math>, <math>u'u^n</math>.</p>	<p>L'intégration permet d'établir l'existence des primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.</p> <p>L'existence d'une solution de l'équation <math>y' = f(t)</math>, admise en première est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.</p> <p>On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.</p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<b>Équations différentielles</b> $y' = ay + b$	<p>On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné.</p> <p>On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à <math>y' = ay + b</math>.</p>	<p>Ce paragraphe, déjà abordé lors de l'introduction de la fonction exponentielle, pourra être réparti sur l'ensemble de l'année.</p> <p>On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique <math>\tau = -1/a</math> pour <math>a &lt; 0</math>.</p> <p>Les indications utiles pour se ramener à <math>y' = ay + b</math> doivent être données.</p> <p>Des solutions de l'équation <math>y'' + \omega^2 y = 0</math> seront introduites en cours de physique.</p>

## II.2. Géométrie

L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classes antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes.

L'extension à l'espace du calcul vectoriel et du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace. Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<b>Géométrie plane : nombres complexes</b> Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .	<p>Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques.</p> <p>On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme <math>z = z_\omega + r e^{i\theta}</math> ou <math>x = x_\omega + r \cos \theta, y = y_\omega + r \sin \theta</math>).</p> <p>La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction <math>\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta</math> vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.</p>	<p>La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe.</p> <p>L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie.</p> <p>On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique.</p> <p>Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.</p>

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p>Résolution dans <math>\mathbb{C}</math> des équations du second degré à coefficients réels.</p> <p>Interprétation géométrique de <math>z \mapsto z'</math> avec <math>z' = z + b</math> ou <math>z' - w = k(z - w)</math> avec <math>k</math> réel non nul, ou <math>z' - w = e^{i\theta}(z - w)</math>.</p>	<p>On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.</p>	<p>On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.</p>
<p><b>Calcul vectoriel dans l'espace</b></p>	<p>On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.</p>	
<p><b>Produit scalaire dans l'espace</b></p> <p>Rappels sur le produit scalaire dans le plan.</p> <p>Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.</p>	<p>Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Équation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan.</p> <p>Inéquation définissant un demi-espace.</p>	<p>On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan.</p>
<p><b>Droites et plans dans l'espace</b></p> <p>Représentation paramétrique d'une droite de l'espace.</p> <p>Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan.</p> <p>Discussion géométrique ; discussion algébrique.</p>	<p>On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement.</p> <p>On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou autres) s'y ramenant.</p>	<p>Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations linéaires.</p>



### II.3. Probabilités et statistiques

On poursuit ici la présentation entreprise en seconde et en première des concepts fondamentaux de probabilité dans le cas fini avec la notion de conditionnement et d'indépendance et l'étude de quelques lois de probabilité.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Conditionnement et indépendance</b></p> <p>Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements.</p> <p>Indépendance de deux variables aléatoires.</p> <p>Formule des probabilités totales.</p> <p><b>Statistique et modélisation</b></p> <p>Expériences indépendantes.</p> <p>Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.</p>	<p>On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée <math>P_A(B)</math>, par des calculs fréquentiels.</p> <p>On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, ... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.</p> <p>Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.</p> <p>Application aux expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes, ...).</p>	<p>Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.</p> <p>Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.</p> <p>On conviendra, en conformité avec l'intuition, que pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.</p>
<p><b>Lois de probabilité</b></p> <p><i>Exemples de lois discrètes</i></p> <p>Introduction des combinaisons, notées <math>\binom{n}{p}</math>.</p> <p>Formule du binôme.</p> <p>Loi de Bernoulli, loi binomiale ; espérance et variance de ces lois.</p> <p><i>Exemple de loi continue</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>loi uniforme sur <math>[0,1]</math>.</li> </ul>	<p>On introduira la notation <math>n!</math>.</p> <p>L'élève devra savoir retrouver les formules :</p> $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ <p>On appliquera ces résultats à des situations variées.</p> <p>♦ La simulation de tirages avec remise est proposée comme activité algorithmique.</p>	<p>Le symbole <math>\binom{n}{p}</math> peut être désigné par la locution « <math>p</math> parmi <math>n</math> ».</p> <p>Pour les dénombrements intervenant dans les problèmes, on en restera à des situations élémentaires résolubles à l'aide d'arbres, de diagrammes ou de combinaisons.</p> <p>La formule donnant l'espérance sera conjecturée puis admise ; la formule de la variance sera admise.</p>

## Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul, en opérant essentiellement sur des nombres entiers.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :

- à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante. Quelques activités pouvant donner lieu à écriture d'algorithmes sont signalées dans le programme par le signe  $\diamond$ .

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

### **Instructions élémentaires** (affectation, calcul, entrée, sortie).

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ;

ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

### **Boucle et itérateur, instruction conditionnelle**

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

## Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

### Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant :  $\in$ ,  $\subset$ ,  $\cup$ ,  $\cap$  ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble  $A$ , on utilise la notation des probabilités  $\bar{A}$ .

**Pour ce qui concerne le raisonnement logique**, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles  $\forall$ ,  $\exists$  ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde, [raisonnement par récurrence](#).

### III. ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les paragraphes qui suivent concernent **deux** domaines choisis pour leur richesse mathématique au niveau d'une formation initiale. L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement. Avec l'étude des similitudes **directes** planes, on vise à la fois une synthèse des études antérieures sur les transformations et une première approche implicite de la structure de groupe.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
<p><b>Arithmétique</b></p> <p>Divisibilité dans <math>\mathbf{Z}</math>. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans <math>\mathbf{Z}</math>. Entiers premiers entre eux. PPCM.</p> <p>Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.</p> <p>Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.</p>	<p>On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège.</p> <p>◊ On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou <b>ordinateur</b> : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.</p> <p>On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.</p> <p>Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes.</p> <p>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.</p> <p>Application : petit théorème de Fermat.</p>	<p>On montrera l'efficacité du langage des congruences.</p> <p>On utilisera les notations : <math>a \equiv b (n)</math> ou <math>a \equiv b \pmod{n}</math>, et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.</p> <p>Toute introduction de <math>\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}</math> est exclue.</p> <p>L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise. premiers.</p> <p>◊ L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'une calculatrice <b>ou sur un ordinateur</b>.</p>
<p><b>Similitudes directes planes</b></p> <p>Définition géométrique d'un déplacement, d'une similitude directe.</p> <p>Caractérisation complexe : toute similitude <b>directe</b> a une écriture complexe de la forme <math>z \mapsto az + b</math> (<math>a</math> non nul).</p> <p>Étude des similitudes directes.</p> <p>Forme réduite d'une similitude directe.</p>	<p>Les similitudes <b>directes</b> seront introduites comme transformations du plan <b>composées d'une homothétie et d'un déplacement</b>.</p> <p>On démontrera qu'une similitude <b>directe</b> conserve les rapports de distances <b>et les angles orientés</b>.</p> <p>On fera remarquer que la réciproque d'une similitude <b>directe</b> est une similitude <b>directe</b>, que la composée de deux similitudes <b>directes</b> est une similitude <b>directe</b> et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative.</p> <p>On démontrera qu'une similitude <b>directe</b> ayant deux points fixes distincts est l'identité.</p> <p>On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre point <math>A, B, A', B'</math> tels que <math>A \neq B</math> et <math>A' \neq B'</math>, il existe une unique similitude directe transformant <math>A</math> en <math>A'</math> et <math>B</math> en <math>B'</math>.</p> <p>Applications géométriques des similitudes <b>directes</b> à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.</p>	<p>La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe <math>z \mapsto az + b</math> ; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples.</p> <p>La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés.</p> <p><b>Les similitudes indirectes sont hors programme.</b></p>